ファイナンス研究センター

Theme

無限の話

執筆者
総合理工学院・理工学部　講師
安富　健児

Profile

専門分野／確率論
研究テーマ／極限定理とその応用
主な所属学会／日本数学会

数には有限なものと無限なものがある。と言う言葉を素直に信じて良いものであろうか？

そもそも数とは何かと言う問いから始めよう。素朴な意味での数は実在する物体の多少を抽象化した概念である。１個のりんご２個のりんごは実際に目の前に用意する事ができる。その多少を抽象化した概念として１,２,３,…という（有限の）数は“ある”と言ってよいだろう。

“それらの有限の数の全ての集まり”をＮと表す。Ｎの“要素の数”はどんな有限の数よりも大きいと言う意味で無限である。だがしかしＮの“要素の数”などと言うものに意味があるだろうか？つまり、無限は無限であって多少などあるわけが無く、故に数ではないのではないかと言う疑問は自然であろう。然るに、現代の数学は“Ｎよりも真に多い要素を持つ集合”を頻繁に扱う、つまり無限集合にも多少の概念があり、その意味で無限集合の“要素の数”も一種の数（濃度と呼ばれる）であると言える。

そもそもの事の起こりは微積分学である。微積分学は物理学や工学に密接に関係した“実用的な”数学である。いやむしろそれらの要請から生まれたものであり、現在の数学の意味で数学が数学である以前から微積分の概念は存在していた。それは究極的に小さな、或いは大きなものを取り扱う概念であり、それらの概念を厳密に記述する為に、今日では完備性と呼ばれる性質が要求され、“実数”Ｒが発明された。実数は、言わば、分数に無限小を足したものである。ところが分数全ての集まりＱの“要素の数”がＮと同じなのに対してＲの“要素の数”はそれらより真に多い事が発見された。かくして無限集合に大小があることとなり、濃度の概念が生まれた。

ここからは極私的な意見である事を先ず断っておく。しかしてＮより真に大きな集合に実際的な意味はあるのだろうか？という疑念を拭えないのである。我々が現実世界で扱う事のできる数は宇宙の終わりまでかかっても有限である。Ｎは無限個の要素を持つが各要素については有限の数であることを持って、任意の要素に有限ステップで、つまり現実的に到達可能である。そしてその性質こそがＮの濃度を特徴付けるものであり、裏を返せばＮより“真に大きな”集合では“現実問題として”、つまり有限のリソースでは、同時に扱う事のできない要素を持つ。もっといえば、同時に扱う事のできる要素の集まりはＮと同じ濃度の部分集合を成し、その意味ではＮより“真に大きな”集合を考える意味を失う。
実際、非可算集合が人工的な概念である事は連続体仮説の独立性の事実が示唆している。つまり、「実数の濃度が２番目に大きい無限濃度であるか否か」は決定不能であり、どちらに決めてもいいという事実は非可算濃度の定義の揺らぎを表しており。この揺らぎかは非可算濃度が数学的なある種のイデアの実現として現れたものでは“ない”ということの傍証と言えないだろうか？かくして非可算濃度が無限小解析を正当化する為にテクニカルな理由で導入されたものであり、存在に必然性を持っていないという信仰に到達する。

勿論、非可算集合は、実数の理論は微積分を厳密に記述する事に成功したと言う点だけを見てさえ、極めて有用な道具である。然るに非可算集合の乱用は現実の問題と数学を乖離させる方向に働くのではないだろうか？可算集合ならいつでも任意の要素が扱えるのが非可算集合ではそうは行かない、実際、実数の関数等を数値で扱うのは有理点か、あるいは有限個の追加要素（π、e等）から高々可算（それらの加減乗除等）の操作で派生するものでしかない。

この様な信仰を抱くにいたって、私は超準解析に興味を持っている。それは非可算集合に依らず無限小解析を厳密に記述する方法であり、歴史的な出現時期が$\varepsilon-\delta$の後塵を拝したという理由でノンスタンダードであるが、素朴な概念をより直接的に実現していると言う意味でよりイデアに近いものであるといえるのではないだろうか？